數學傳播　48卷4期, pp. 60-65

枚舉幾何與鏡像對稱

周祐正

本文於2024年9月2日刊載於中研院訊漫步科研專欄, 作者及中研院訊同意本刊轉載

一、枚舉幾何簡史

枚舉幾何 (Enumerative geometry) 是幾何學的重要分支, 是研究在給定條件下有多少滿足條件的幾何物件的學問。自古希臘以來, 已有相關的文獻記載。

19世紀, 數學家赫爾曼·舒伯特 (Hermann Schubert) 研究了投影幾何中的枚舉問題, 並發展了相關理論, 現今稱爲舒伯特計數 (Schubert calculus)。這種方法影響深遠, 並可被視爲現今模空間 (moduli space) 上的相交理論 (intersection theory) 的雛形。

1991年, 鏡像對稱 (mirror symmetry) 對枚舉幾何的發展產生了重要的影響。物理學家 Philip Candelas、Xenia de la Ossa、Paul Green 和 Linda Parks 發現鏡像對稱可用於計算卡拉比-丘三維流形 (Calabi-Yau threefold) 上有理曲線的數量。儘管鏡像對稱最初的方法源自於物理, 數學上並不嚴格, 但許多預測已經在數學上被嚴格證明。

在物理上, 鏡像對稱是指卡拉比-丘三維流形之間的一種對偶關係, 即兩種卡拉比-丘流形雖然在幾何上差別很大, 但是作爲弦論 (String theory) 的額外維度時卻是等價的。這樣的一對流形被稱爲鏡像流形。

30 多年後的今天, 研究卡拉比-丘流形和鏡像對稱仍然在數學和物理上是個活躍的學科, 而枚舉幾何就是其中一個重要的主題。

二、歷史上著名的問題

在數學的各個領域中, 總是存在一些具有引導意義的問題。這些問題有時過於困難, 似乎永遠無法被完全解決。儘管如此, 許多數學家仍然投入極大的努力去追逐解答。即使最終未能得出答案, 過程中也常會出現許多突破和令人振奮的結果。

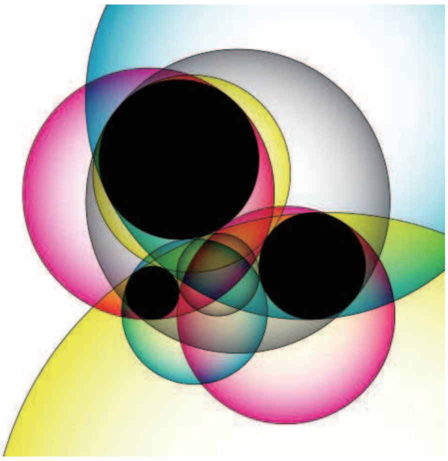
以下依照歷史的時間順序, 列舉了一些歷史上枚舉幾何已解決的重要問題 (尚未解決的問題將在文章末尾提及)。

問題 1: 歐幾里得 (Euclid, 約公元前 300 年): 有多少直線通過平面上給定的兩個點?

這個問題在大家的求學過程中可能都曾接觸過。答案是 1, 因爲兩點決定一直線, 這也是歐幾里得幾何 (Euclidean geometry) 中五大公理的第一條。

問題 2: 阿波羅尼烏斯 (Apollonius, 約公元前 200 年): 在平面上給定三個圓, 有多少圓同時與它們相切?

阿波羅尼烏斯自己給出了答案: 8 個 (如下圖)。我們可以觀察到, 這個數字來自於與每個圓外切或內切的選擇, 具體爲 $2 \times 2 \times 2 = 8$。



File:Apollonius8ColorMultiplyV2.svg - Wikimedia Commons

以上的圖不完全準確。要得到答案 8, 問題中的平面應該理解爲二維複數平面 ($\mathbb{C}^2$)。原諒我無法將其畫出。在實數平面 ($\mathbb{R}^2$) 的情況下, 如果適當的選取圓的大小和位置, 答案可能出現 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$。要了解其中的原因, 讀者可以回憶解一元二次方程式的時候, 在實數和複數上討論有什麼區別。

以上兩個就是標準的枚舉幾何的問題, 研究在給定條件下有多少滿足的幾何物件。也許有讀者會問, 爲什麼問題 2 要討論相切三個圓, 而不是更多的四個圓或更少的兩個?

我們以問題 1 來解釋, 如果將問題改爲通過三個點會怎樣? 或者通過一個點呢? 你會發現, 對於三個點的情況, 答案爲 0 (除非三點共線的特殊情況), 而對於一個點的情況, 答案則爲無限多個。

合理的條件: 在非特殊情況下, 使得要枚舉的幾何物件的數量是有限的。

回到問題 2, 相切三個圓是合理的條件, 因爲若圓的數量過多則無解, 過少則會有無窮多個解。這裡給有興趣的讀者一個相關的問題: 如果問題 2 改爲通過兩個點、相切 1 個圓, 這是一個合理的問題嗎? 如果是, 那麼答案是多少呢?

從圓到圓錐曲線這個推廣看似直接, 但在歷史上卻經過了 2000 年。圓錐曲線 (conic section) 是二維複數平面上 ($\mathbb{C}^2$) 由以下方程定義的曲線:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

問題 3 (Steiner, 1850 **年代**): 在二維複數平面上, 給定五個圓錐曲線, 有多少圓錐曲線同時與它們相切?

爲什麼是五個圓錐曲線呢? 我們發現, 所有圓錐曲線的集合形成了一個五維空間, 因爲方程中有 (a, b, c, d, e, f) 六個變數, 但同時縮放這些變數定義了相同的曲線, 因此維度 $= 6-1 = 5$。兩個圓錐曲線相切的條件會給出一維的限制, 問題中的五個相切條件剛好用掉了所有的維度, 因此是合理的條件。

Jacob Steiner 自己給出了答案 7776, 後來發現是不正確的。Michel Chasles 後來給出了正確答案 3264。

在現代的觀點來看, 以上兩個答案都是正確的! 首先, 兩個答案的差異 $7776 - 3264 = 4512$ 來自於二重線 (double line), 它是圓錐曲線的一種退化。因此, 答案是否正確取決於我們在枚舉問題中是否允許退化的情況。其次, 兩個數字各自具有特定的意義。用現代的語言來說, 7776 可以被理解爲一個 Donaldson-Thomas 不變量, 而 3264 可以被理解爲一個 Gromov-Witten 不變量。

最後值得一提的是, 2023 年由 John Pardon 證明的 GW/DT 對應 (又稱 MNOP 猜想), 猜想宣稱 Gromov-Witten 不變量和 Donaldson-Thomas 不變量是可以被互相決定的。有趣的是, 這一猜想是受弦論啟發的, 而這個例子早在弦論發明前 150 年就已被研究。

我們以最後一個例子來解釋物理對枚舉幾何的影響。

問題 4: 在二維投影空間中, 有多少度數爲 d 的有理曲線通過給定的 $3d-1$ 個點? (爲了方便讀者想像, 在實數空間中, 有理曲線可以理解成一個球。這個問題可以理解成在一個特定空間, 有多少種方法將球放入空間中滿足給定條件?)

我們把問題的答案稱做 N_d。這個問題有很長的歷史: $N_1 = 1$ 是歐幾里得幾何五大公理的第一條; 阿波羅尼烏斯 (約公元前 200 年) 證明了 $N_2 = 1$; Chasles (1860 年代) 證明了 $N_3 = 12$ 和 $N_4 = 620$; Schubert (1870 年代) 證明了 $N_5 = 87304$。時間到了 1993 年, Maxim Kontsevich 運用 Gromov-Witten 理論給出了完整的答案, 論證如下:

考慮生成函數

$$F(x, y) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{y^{3d-1}}{(3d-1)!} e^{dx},$$

此函數滿足以下方程 (WDVV-方程) :

$$\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = \Big(\frac{\partial F}{\partial x^2 \partial y}\Big)^2 - \frac{\partial F}{\partial x \partial y^2}\,\frac{\partial F}{\partial y^3}.$$

有興趣的讀者可以嘗試用上方方程得出以下遞迴式:

$$N_d = \sum_{d_1+d_2=d} N_{d_1} N_{d_2} \left(d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right).$$

這是一個振奮人心的結果。過去, 人們只能逐一計算不同度數的解, 隨著度數的增加, 計算的難度越來越高, 想要得到如 $N_8 = 13525751027392$ 更是天方夜譚。現在, 有了上述的遞迴式, 無論度數多大都不再是問題。

物理學在這裡提供了很大的啟發, 計算單一的不變量可能很困難, 一次收集所有不變量並形成生成函數往往更容易研究, 因爲它們總是滿足一些 (猶如天賜的) 神奇的規律或方程!

三、模空間上的相交理論

我們簡單介紹受弦論影響後, 現今枚舉幾何的研究方法。

在幾何學中, 研究空間往往是個極具挑戰性的問題。數學家們嘗試通過研究各種不變量來簡化這些問題, 例如維度、上同調群、基本群等等。這些不變量的目標是將複雜的幾何問題轉化爲我們更擅長處理的代數問題。

相交理論就是其中一個例子。相交理論研究在具有良好幾何結構的空間中, 多個子空間彼此相交的情況。我們可以收集幾何空間中所有子空間所形成的集合, 這個集合具備乘法結構, 兩個子空間的乘法定義爲它們的相交。例如, 在三維空間中, 兩個平面相交形成一條線; 一個平面與一條線相交形成一個點。最後, 這個過程所得到的代數結構稱爲環 (ring)。

模空間是一個相對近代的幾何研究方法。給定一個幾何物件, 我們不僅研究物件本身, 還會收集所有具有相同性質的幾何物件, 這樣形成的集合稱爲模空間。一般而言, 模空間不僅僅是個集合, 它具備了良好的幾何結構 (由幾何空間形成的集合仍然是幾何空間), 我們可以在其上研究相交理論。這一研究脈絡對現代枚舉幾何的發展有著深遠的影響, 這裡有一個大膽的宣稱:

枚舉幾何就是模空間上的相交理論。

以問題 3 爲例, 我們遵循以下步驟:

1. 考慮所有要枚舉的幾何物件 (圓錐曲線) 所形成的模空間;
2. 考慮滿足給定條件 (與給定的圓錐曲線相切) 的物件所形成的子空間;
3. 考慮所有子空間 (五個子空間) 的交集, 計算所有交集出的點的數量。

以上步驟看似輕描淡寫, 但要在數學上嚴格實現每一步並不容易。相同的脈絡可以應用於各種枚舉幾何的問題。

四、枚舉幾何、鏡像對稱與未來發展

要介紹現代枚舉幾何的發展, 就必須提及鏡像對稱。鏡像對稱的歷史相當複雜, 在此僅提及與枚舉幾何相關的初始部分。

卡拉比-丘三維流形是一種特殊的幾何空間, 在理論物理中 (特別是超弦理論) 具有重要應用。超弦理論認爲宇宙是十維的, 其中四維是我們熟悉的時空, 而其餘六維則由卡拉比-丘三維流形 (對應於實數六維) 組成。數學家和物理學家對其中度數爲 d 的有理曲線的數量 (計作 n_d) 很感興趣。然而, 僅在一個特殊的卡拉比-丘三維流形中 (quintic threefold) 計算前兩個數字 $n_1 = 2875$、$n_2 = 609250$ 就花了數學家百年的時間。

這些數字在弦理論也出現了。1991 年, 前面提到的 Philip Candelas 與其合作者利用鏡像對稱, 在其鏡像空間的 IIB 弦理論宣稱算出了所有的 n_d。方法和前面解決問題 4 的思路一樣, 寫出由所有 n_d 形成的生成函數, 並證明此函數滿足一個簡單的四階常微分方程。

這一結果對數學界和物理學界產生了深遠影響, 爲兩個領域的合作提供了契機。隨後, 數學家開始關注弦論的發展, 儘管許多論證仍不夠嚴謹, 未被普遍接受; 同時, 物理學家也開始學習數學的奧秘。然而, 由於所需的數學工具過於龐大且缺乏實驗佐證, 許多物理學家僅將其視爲一種艱難的數學遊戲。

後來, 數學家發現 $n_{10} = 704288164978453539584043811625$, 而不是原先宣稱的 $n'_{10} = 704288164978454686113488249750$。儘管如此, 過去 30 年的深刻交流仍爲枚舉幾何帶來了豐碩成果。許多不變量 (如: Gromov-Witten 不變量、Donaldson-Thomas 不變量、Pandharipande-Thomas 不變量、Gopakumar-Vafa 不變量) 和相關的理論被提出。數學家借助物理的靈感而推進理論, 而物理學家在尚無法以實驗佐證弦論的情況下, 依靠嚴格的數學證明來驗證想法。

最後, 回到最初的問題: 給定任意卡拉比-丘三維流形, 如何求出其上度數爲 d 的有理曲線數量? 或者, 更基本的問題, 如何找出所有的卡拉比-丘三維流形? 在超弦理論中, 哪個流形構成了我們的宇宙模型? 或者, 更大膽地猜測, 所有這些模型是否通過適當的幾何操作都是等價的 (見註1)? 這些問題至今尚未完全解決。然而, 我相信, 隨著數學和物理的發展, 問題最終會被解決。過程中, 新的問題將不斷湧現, 繼續吸引人們的追逐, 並推動理論的進步, 如此反覆, 永不止息。

註1: 2007 年, 李元斌、林惠雯和王金龍 (在筆者求學過程中頗有照顧的三位老師) 在這方面的問題取得了重要的進展。他們證明了若兩空間可以經由一系列基本的幾何手術 (flop) 相連, 那麼這兩個空間的枚舉幾何理論可以通過解析延拓來相互連結。

參考資料

1. D. A. Cox and S. Katz, *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry.* Mathematical

Surveys and Monographs; Vol. 68, American Mathematical Society, 1999.
2. Y.-H. Kiem, *Enumerative Geometry, Before and After String Theory.* KIAS (Korea Institute For Advanced Study) expositions, KIAS, 2021.2.26.

—本文作者爲中央研究院數學研究所博士後研究人員—

勘誤表

第 48 卷 3 期, 第 4 頁 Line 4。

原爲 : Matematicheskaya Skolastika (**Математическая Сколастика**)

應爲 : Matematicheskaya Skolastika (Математическая Схоластика)

第 46 卷 4 期, 第 4 頁 Line -7 至 Line -4。

$$\triangle \cdot E = 0,$$
$$\triangle \cdot B = 0,$$
$$\triangle \times B - \frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$
$$\triangle \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0.$$

應爲 :

$$\nabla \cdot E = 0,$$
$$\nabla \cdot B = 0,$$
$$\nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$
$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0.$$